

Теоретические основы моделирования

Условное моделирование

Условное моделирование – это замещение оригинала условной моделью, представляющей его только благодаря договоренности о смысле, приписанном этой модели. Прежде всего – знаковые модели. Знак или символ – искусственный образ, чисто условно изображающий вполне определенный объект и, как правило, не имеющий с этим объектом никакого сходства. Отдельный знак (т.е. простейшая условная модель) обладает ограниченными моделирующими возможностями. Он условно обозначает вещь, явление, действие, событие, свойство, связь или отношение вещей, явлений, свойств и т.д. Однако, в случае применения системы знаков, эти возможности резко возрастают.

Сформулировать общие правила построения знаковых моделей невозможно, так как формирование их имеет поисковый эвристический характер.

Основные требования, предъявляемые к таким моделям:

- необходимость – невозможность использовать имеющиеся символы;
- простота – простое при равных условиях предпочтительнее сложного;
- наглядность – хотя бы самое отдаленное сходство с оригиналом;
- индивидуальность – достаточное отличие от других символов;
- однозначность – недопустимость обозначения одним символом различных объектов;
- единообразие – при моделировании однородных объектов;
- определенность – сопровождение четким указанием о принятом решении;
- учет установившихся традиций.

Пример: запись кубического уравнения вида

$$Dx^3 + x^2 + Ox + \mathfrak{Z} = 0$$

явно неудачна. Более удачно

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

еще лучше

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$

самая удачная

$$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0,$$

которую легко записать в сокращенной форме

$$\sum_0^3 A_i x^i = 0.$$

Если знаковая модель выбрана удачно, она получает всеобщее признание, примером этого служат русские и латинские буквы, примерами неудачных – немецкие готические и иероглифы.

Условными являются также образно-знаковые модели, которые отличаются наглядностью и могут обладать определенным сходством с оригиналом. Например, структурные схемы, направленные графы систем автоматизированного управления наглядно показывают число звеньев, связи звеньев, переменные величины, действующие на входах и выходах звеньев и системы в целом.

К знаковым и образно-знаковым моделям относятся все математические формы выражения количественных отношений между переменными и постоянными величинами (функции, уравнения, неравенства, графики, номограммы, таблицы, алгоритмы и т.д.).

Аналогия

Аналогия – сходство различных объектов по некоторым признакам.

Аналоги – объекты, сходные по соответствующим признакам.

Сходственные признаки – признаки, по которым объекты оказываются аналогами.

Сходственные признаки могут иметь *качественный* и *количественный* характер.

В зависимости от этого различают *качественную*, *количественную* и *смешанную* аналогии.

Основное значение аналогий – перенос сведений с одного объекта на другой (аналог) на основании умозаключений по аналогии.

Умозаключение по аналогии

Умозаключение по аналогии – основано на предположении существования тождественного в различном и выполняется по схеме:

– Установлено, что объект O_1 обладает свойствами $C_0, C_1, \dots, C_N, C'_1, \dots, C'_{n1}$.

– Установлено, что объект O_2 обладает свойствами $C_1, \dots, C_N, C''_1, \dots, C''_{n2}$.

– Вывод: возможно, что объект O_2 обладает свойством C_0 , как объект O_1 .

– Если среди C'' есть хотя бы одно свойство C''_i несовместное с C_0 , то сходство объектов по свойствам $C_1, \dots, C_N$ не имеет никакого значения.

Умозаключение по аналогии имеет гипотетический характер, может привести либо к истинному, либо к ложному выводу.

Пример, аналогия между движением жидкости и процессом распространения тепла привела к неправильному выводу о существовании теплорода.

Суждение, полученное по аналогии, нуждается в специальной проверке. Вероятность правильности этого суждения тем больше, чем сильнее связь между свойствами C , чем слабее связь между C и C' и между C и C'' , чем больше N и чем меньше n_1, n_2 .

Умозаключение по аналогии имеет доказательный характер, если общие свойства объектов $C_1, \dots, C_N$ обуславливают свойство C_0 .

Умозаключение по аналогии является основой аналогичного моделирования

пример, замещение организма человека организмом животного с целью исследования действия новых лекарств, что неопределимо важно для развития медицины.

Использование аналогий

1) для придания наглядности

аналогия электрического тока с движением жидкости

2) для формирования понятий

Примеры понятий, введенных по аналогии: теплоемкость, запоминающее устройство, электродвижущая сила.

3) для иллюстрации

Пример иллюстрации по аналогии: иллюстрацией понятия устойчивости служит система "шарик на вогнутой поверхности в поле тяготения".

4) как активизатор мышления и источник идей

Пример: соотношения $1^1 + 2^1 = 3^1, 3^2 + 4^2 = 5^2$ по аналогии привели математика П. Ферма к уравнению $x^n + y^n = z^n$ с тремя неизвестными и к формулировке «великой теоремы» теории чисел, согласно которой это уравнение при любом целом $n > 2$ не имеет целых положительных решений. Справедливость теоремы Ферма доказана для всех $n \leq 100$, но в общем виде она остается недоказанной.

«Стандартным» методом генерации идей на основании аналогии является обобщение. Например, переход от биквадратных уравнений к бикубическим и биаггбраическим, от комплексных чисел к гиперкомплексным, от обычного преобразования Лапласа к многомерному и двустороннему.

5) для строгих выводов и доказательств

б) Аналогичное моделирование – замещение оригинала аналогичной моделью, обладающей сходством с оригиналом, достаточным для экстраполяции ее свойств и отношений в свойства и отношения оригинала на основании умозаключений по аналогии. Аналогичное моделирование используется обычно при сравнительно слабой изученности оригинала, когда имеющиеся сведения об его свойствах носят только качественный характер.

При удачном выборе модели аналогичное моделирование позволяет получить весьма интересные и важные результаты. К сожалению, общая методика аналогичного моделирования невозможна, и требуется поиск модели. Во многих случаях целесообразно использовать аналогичные формальные модели, основанные на механических, электрических, акустических аналогиях.

Теория подобия

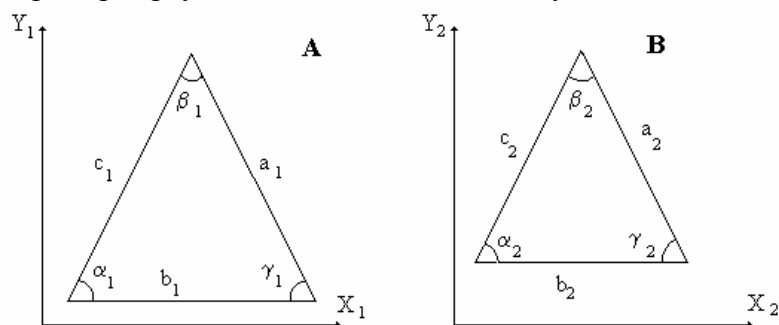
Особое место среди математических моделей занимают подобные. Если при аналогии двух объектов распространение свойств одного объекта на другой носит характер предположения и нуждается в проверке, то при подобии знание свойств одного объекта значит знание свойств другого объекта.

Подобие – это полная математическая аналогия при наличии пропорциональности между сходственными переменными, неизменно сохраняющаяся при всех возможных значениях этих переменных, удовлетворяющих сходственным уравнениям.

Впервые понятие «подобие» появилось в геометрии.

Геометрическое подобие

Геометрическое подобие – определяют подобность геометрических фигур по сходственным характеристикам. Многоугольник с определенным количеством сторон n , подобен другому многоугольнику с таким же количеством сторон n , если соответствующие углы многоугольников равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Определение геометрического подобия многоугольников, на примере треугольников, состоит в следующем:



треугольники подобны, если у них сходственные стороны пропорциональны, а сходственные углы равны и, т. е. выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = m_L \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{g_1}{g_2} = m_m = 1 \end{cases}, \quad (1)$$

где m_L и m_m – масштабные коэффициенты (масштабы) величин сторон и углов, характеризующие пропорциональность сходственных параметров.

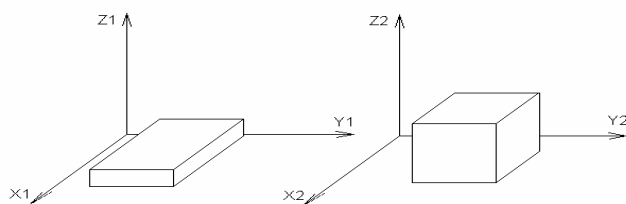
(Оговорка: если m_L и m_m называются масштабными коэффициентами, то величины обратные им, т.е. $1/m_L$ и $1/m_m$ будут называться масштабами и обозначаться, соответственно, M_L и M_m или наоборот, или вообще не делается различия между терминами «масштаб» и «масштабный коэффициент»).

На практике при геометрическом подобии используются не характеристики длин сторон многоугольника, а их координаты.

Данный вид подобия может существовать и в пространстве большей размерности: трех- и более мерном.

Аффинное подобие

Дальнейшее развитие понятия подобие является – аффинное подобие, при котором допускается неравенство масштабов по отдельным координатным осям.



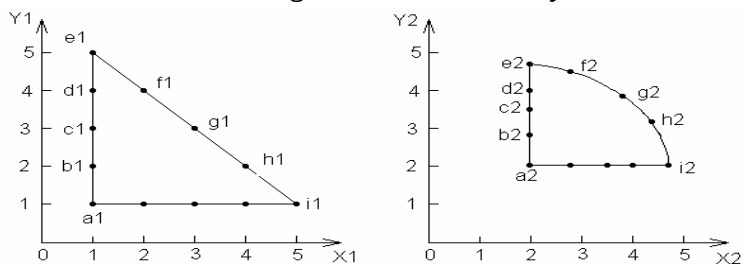
Превращение параллелепипеда в куб.

При аффинном подобии для сходственных точек в трехмерном координатном пространстве будут справедливы следующие соотношения:

$$\frac{x_i^{(1)}}{x_i^{(2)}} = m_x, \quad \frac{y_i^{(1)}}{y_i^{(2)}} = m_y, \quad \frac{z_i^{(1)}}{z_i^{(2)}} = m_z, \quad m_x \neq m_y \neq m_z.$$

При этом требуется введение специальных преобразующих функций, осуществляющих взаимосвязь между координатами моделей и объекта, часто – нелинейных.

Пример: установить условия аффинного подобия, отрезки линий $e_1 - i_1$ являются не линейно сходственными линиями $e_2 - i_2$, точки e_1, f_1, g_1, h_1, i_1 соответствуют точкам e_2, f_2, g_2, h_2, i_2 .



Нелинейное преобразование

Уравнения для контуров $e_1 - i_1$ и $e_2 - i_2$ имеет вид:

$$x_1 + y_1 = 6; \quad x_2^2 + y_2^2 = 24.$$

Вводятся масштабные коэффициенты $F_x = x_1 / X_1$ и $F_y = y_1 / Y_1$, вид которых пока неизвестен, для уравнения первого контура можно записать:

$$X_1 F_x + Y_1 F_y = 6,$$

где X_1 и Y_1 преобразованные в область В значения x_1 и y_1 из области А. После тождественных преобразований уравнение выглядит:

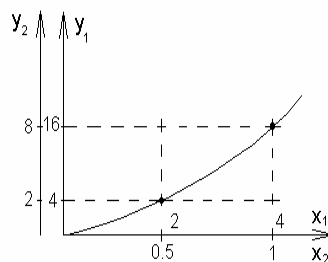
$$[(2X_1 / \sqrt{x_1}) F_x]^2 + [(2Y_1 / \sqrt{y_1}) F_y]^2 = 24,$$

таким образом $F_x = \sqrt{x_1} / 2$; $F_y = \sqrt{y_1} / 2$ и, следовательно :

$$x_2 = 2\sqrt{x_1} \text{ и } y_2 = 2\sqrt{y_1}.$$

В приведенном примере функции преобразования F_x и F_y имеют одинаковый вид, но нелинейный характер.

Следующий пример: даны две функции: $y_1 = x_1^2$; $y_2 = 8x_2^2$, если масштабы $m_y = y_1 / y_2$: $m_x = x_1 / x_2$, соответственно равны 2 и 4, то функции подобны.



Подобные функции (пример)

В этом примере переменные имеют различные масштабные коэффициенты по координатным осям.

Подобие физических процессов (объектов)

Любой конкретный физический процесс характеризуется функциональной зависимостью F между параметрами $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$. Эту функциональную зависимость $D_0 = F(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n)$ можно графически отобразить в соответствующем n -мерном координатном пространстве $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$. В этом координатном пространстве каждый параметр соотнесен с определенной координатной осью.

Аналогично в том же координатном пространстве может быть отображен другой процесс $\Phi_0 = F(R_1, \dots, R_j, \dots, R_n)$, который характеризуется сходными с D_0 параметрами. Два физических процесса будут подобны, если сходственные параметры пропорциональны, т.е. если $\frac{P_1}{R_1} = m_1, \dots, \frac{P_n}{R_n} = m_n$, а функциональные зависимости идентичны. В этом случае D_0 и Φ_0 подобны.

Не все масштабные коэффициенты $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$ могут принимать независимые значения, вследствие того, что зависимы параметры, которые характеризуют процесс. Это делает возможным введение обобщенных характеристик подобных процессов – критериев подобия. Критерии подобия – это функции групп зависимых и независимых параметров. Если масштабные коэффициенты, в общем случае численно различны, то критерии подобия принимают одинаковые значения в сходственных точках обобщенного пространства параметров $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$.

Пропорциональность параметров – частный случай подобия физических процессов. Понятие сходственных точек и величин значительно сложнее в теории подобия физических явлений, нежели в геометрии.

Сходственные величины, сходственные точки пространства, времени и параметров процесса – это такие величины, при которых их значениям в одной системе, так или иначе, соответствуют значения в другой системе.

Сходственные функции – функции, различающиеся только аргументами и ненулевыми постоянными.

Пример, $z = x \cos y$ и $u = 2v \cos 3w$ или $r = 4s \cos (5t + 6)$ и $q = 7p \cos (8l + 9)$ являются сходственными.

Сходственные переменные – это переменные величины, которые входят в сходственные функции.

Сходственные постоянные – аналогично сходственным переменным.

Пример, Сходственные функции $x = a_1 + a_2 x_1 \ln a_3 x_2$, $y = b_1 + b_2 y_1 \ln b_3 y_2$ содержит сходственные переменные x и y , x_1 и y_1 , x_2 и y_2 , сходственные постоянные a_1 и b_1 , a_2 и b_2 , a_3 и b_3 .

Сходственные уравнения получаются из сходственных функций путем преобразования к однородному уравнению и приравнивания между собой.

Подобие – это взаимоднозначное соответствие между объектами (процессами), при котором функции или правила перехода от параметров, характеризующих один из объектов, к параметрам, в том же смысле характеризующих другой объект, известны, а математические описания допускают их преобразования к тождественному виду.

Два объекта абсолютно подобны друг другу, если в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства параметры одного объекта P_i находятся в некотором соответствии с параметрами другого объекта R_i .

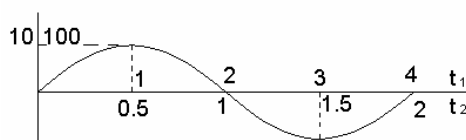
$$P_i / R_i = m_i \Rightarrow$$

а) $m_i = \text{const} \rightarrow$ геометрическое подобие

б) $m_i \neq \text{const} \rightarrow$ аффинное или физическое подобие

Пример. Имеются два генератора переменного тока. Их описывает функция зависимости напряжения от времени: $u_1 = 100 \sin 2p \left(\frac{t_1}{4} \right)$ и $u_2 = 10 \sin 2p \left(\frac{t_2}{2} \right)$. Выражения для масштабов имеют вид $m_u = u_1 / u_2$, $m_t = t_1 / t_2$. Время, входящее в одну формулу и время, входящее в другую формулу имеют вполне определенный физический смысл, так как t_1 и t_2 такие различные значения одной и той же величины t , при которых фиксируются значения различных зависимых переменных $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Физическое и временное подобие имеет место при $m_u = 10$ и $m_t = 2$. Масштаб m_u показывает отношение амплитуд напряжений u_1 и u_2 , масштаб m_t - отношение периодов $T_1 = 4$ с и $T_2 = 2$ с.

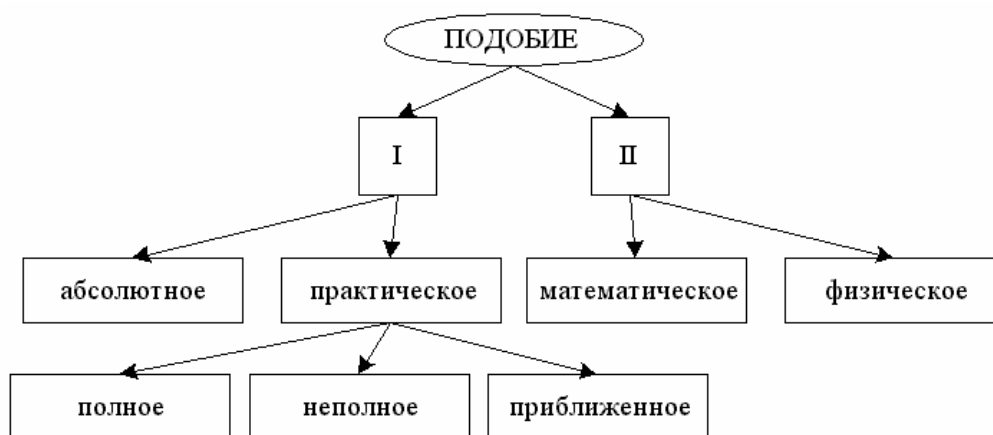


Подобие генераторов (пример)

В общем случае временного подобия безразмерный масштаб времени представляет отношение сходственных временных интервалов, которым соответствует неизменное отношение значений или приращений подобных временных функций. Этими параметрами могут быть периоды колебаний (как в примере), постоянные времени, длительности переходных процессов, временные задержки и т.д.

Если, например, имеются две подобные САУ, то, установив время переходного процесса одной из них τ_1 и зная временной масштаб m_t , можно найти время переходного процесса другой системы: $\tau_2 = \tau_1 / m_t$.

Виды подобия



Виды подобия различаются по двум основным признакам:

I. степень соответствия параметров оригинала и модели (абсолютное и неабсолютное или практическое подобие, которое может быть полным, неполным и приближенным);

II. адекватность физической природы подобных явлений (математическое подобие и физическое подобие, которое может быть механическим, тепловым, электрическим и т.п.)

Абсолютное подобие в значительной мере носит абстрактный характер. Реализуется только в геометрических построениях и в отдельных видах математического подобия.

Практическое подобие отличается от абсолютного тем, что рассматриваются не все процессы в сравниваемых объектах. В зависимости от того какие процессы рассматриваются. Различают полное, неполное и приближенное подобие.

Полное практическое (слово «практическое» далее опускается) подобие – подобие протекания во времени и в пространстве только тех процессов, которые существенны для данного исследования. (Если, например, электромеханические явления в синхронных генераторах полностью подобны, то все процессы изменения во времени токов, напряжений, вращающих моментов и изменение во времени и в пространстве распределения магнитных и электрических полей отличаются только масштабами. При этом тепловые явления могут быть неподобными, так как они не влияют на подобие исследуемых электромеханических процессов).

Неполное подобие – подобие протекания процессов только во времени или только в пространстве. (Например, есть подобие электромеханических процессов во времени, но нет подобия распространения полей).

Приближенное подобие – характеризуется наличием допущений, приводящих к допустимым искажениям одного из процессов. Приближенное подобие бывает также полным и неполным. (Например, подобие генераторов, устанавливаемое по упрощенным уравнениям, которые не учитывают апериодическую составляющую тока статора и периодическую составляющую тока ротора.)

По **II** признаку различают математическое и физическое подобие.

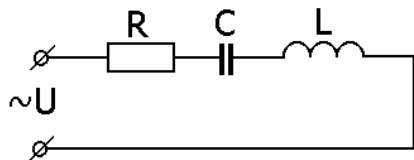
Физическое подобие – когда одинакова физическая природа подобных явлений. Бывает полное, неполное и приближенное. Например: механически подобным процессам ставятся в соответствие механические, электрическим – электрические, тепловым – тепловые и т.д., то есть модель функционирует на тех же физических законах, что и сам объект.

Математическое подобие – когда сходственные параметры сравниваемых процессов различной физической природы соответствуют друг другу.

Пример математического подобия

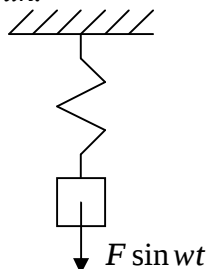
Пример математического подобия:

Уравнение переходного процесса в электрической цепи (последовательное соединение резистора R , индуктивности L и конденсатора C), включенной на переменное напряжение u , изменяющееся во времени t по синусоидальному закону с угловой скоростью ω . Где q заряд на пластинах конденсатора C .



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u \sin \omega t$$

Уравнение процесса вынужденных механических колебаний в вязкой среде груза массы M на пружине жесткостью c , под действием возмущающей силы $F = \sin \omega t$ и пропорциональной скорости движения груза v силы сопротивления вязкой среды $F = -kv$, где l - расстояние, на которое перемещается груз, а k - коэффициент вязкости среды, в которой перемещается маятник.



$$M \frac{d^2 l}{dt^2} + k \frac{dl}{dt} + cl = F \sin \omega t$$

Сходственными параметрами в данном случае будут M и L , k и R , c и C , u и F , а электрический колебательный контур может служить аналоговой моделью объекта-оригинала (колеблющегося на пружине груза), наблюдаемый процесс в колебательном контуре будет одновременно решением дифференциального уравнения, описывающего движение груза.

Теория размерности

В общем случае физическая величина X – это некоторое свойство материального объекта, допускающее количественное выражение, например, длина L , объем V , масса M .

Измерить некоторую величину P – это значит сопоставить ее с другой величиной Q той же физической природы и определить, во сколько раз P больше или меньше Q . При этом величина Q называется единицей измерения.

Количественное значение физической величины X в конкретном материальном объекте x – это размер физической величины X .

Для определения размера x физической величины X данного объекта требуется сравнить ее размер с размером $\{x\}$ той же физической величины другого объекта, принятого за единицу.

В результате измерения устанавливается числовое значение x° размера x :

$$x^\circ = x / \{x\}$$

и размер выражается через числовое значение x° и единицу измерения $\{x\}$:

$$x = x^\circ \{x\}$$

Если рассмотреть данную формулу как условную знаковую модель, то символы x , x° , $\{x\}$ моделируют соответственно размер, числовое значение и единицу физической величины X . Знак $=$ означает равенство объектов-оригиналов, символические модели которых расположены справа и слева от него.

Размер x не зависит от единицы измерения $\{x\}$, от нее зависит только числовое значение x° размера x .

Каждый материальный объект обладает несколькими свойствами, допускающими количественное выражение. Между различными свойствами объективно существуют конкретные связи. Они обуславливают определенные соотношения между размерами физических величин, которые можно выразить в виде формулы. Поэтому, если выбрать произвольно единицы некоторых физических величин, то через эти единицы можно выразить единицы всех остальных физических величин.

Основные физические величины – размеры единиц, которых выбираются произвольно. Единицы измерения основных физических величин также называются **основными**.

Производные единицы измерения – единицы измерения остальных физических величин, которые выражены через основные на основе физических законов между величинами исходного объекта величинами и величинами единиц измерения, которые приняты в качестве основных.

$$[u] = [L][T^{-1}] \quad F = am \quad [F] = [L][T^{-2}][M]$$

Система единиц измерения – совокупность основных и производных единиц.

Пример: СИ включает в себя следующие единицы:

	Обозначение	Размерность	Ед. измерения
1. Длина	l	L	Метр (м)
2. Масса	m	M	Килограмм (кг)
3. Время	t	T	Секунда (с)
4. Сила тока	i	I	Ампер (А)
5. Термодинамическая температура	T	Q	Кельвин (К)
6. Количество вещества	m	N	Моль
7. Сила света	J	J	Кандела (кд)

Определяющее уравнение

Пусть для физических величин $Y_1, Y_2, \dots$ выбраны независимые основные единицы $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots$ и для другой величины X требуется установить производную единицу $\{x\}$. Для этого выбирается материальный объект, в котором размеры $X, Y_1, Y_2, \dots$ связаны уравнением:

$$x = k F(y_1, y_2, \dots), \quad (1.3)$$

где k - коэффициент пропорциональности, или

$$x^\circ \{x\} = k F(y_1^\circ \{y_1\}, y_2^\circ \{y_2\}, \dots) \quad (1.4)$$

Положив $x^\circ = y_1^\circ = y_2^\circ = \dots = 1$, можно выразить производную единицу через основные:

$$\{x\} = k F(\{y_1\}, \{y_2\}, \dots). \quad (1.5)$$

Для обеспечения идентичности выражений, размеры и числовые значения $X, Y_1, Y_2, \dots$, аналогичной (3) должна быть зависимость:

$$x^\circ = k F(y_1^\circ, y_2^\circ, \dots). \quad (1.6)$$

Подставляя выражения (5), (6) в (4) получим:

$$k F(y_1^\circ, y_2^\circ, \dots) k F(\{y_1\}, \{y_2\}, \dots) = k F(y_1^\circ \{y_1\}, y_2^\circ \{y_2\}, \dots),$$

равносильное системе двух уравнений:

$$\begin{cases} k^2 = k \\ F(y_1^\circ \{y_1\}, y_2^\circ \{y_2\}, \mathbf{K}) = F(y_1^\circ, y_2^\circ, \mathbf{K}) F(\{y_1\}, \{y_2\}, \mathbf{K}) \end{cases}$$

Первое уравнение имеет два корня (0, 1), смысл имеет $k = 1$. Второе выражение функциональное, в котором неизвестен вид функции F . По смыслу выражения (3) эта функция должна быть непрерывной, единственной функцией удовлетворяющей такому условию является произведение степеней $y_1, y_2, \dots$, т.е. функция:

$$F(y_1, y_2, \dots) = y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots, \quad (1.9)$$

в которой показатели степени могут быть любыми числами, и которая называется степенным комплексом.

Вывод: для установления производных единиц измерения пригодны только физические формулы в виде степенных комплексов с постоянным коэффициентом, равным единице.

Определяющее уравнение – степенной комплекс, выбранный для установления производной единицы измерения.

В общем случае производная единица физической величины выражается не только через основные, но и через, ранее установленные - производные единицы других величин.

Общее символическое выражение производной единицы:

$$\{x\} = \{y_1\}^{a_1} \{y_2\}^{a_2} \dots \{x_1\}^{b_1} \{x_2\}^{b_2} \dots \quad (1.10)$$

Для простоты определяющего уравнения, как правило, уравнение выбирается так, чтобы оно содержало не более 3- 4-х физических величин, а модули степеней a, b были бы равны единице или двум.

Размерность

Выражение производной единицы через основные не раскрывает ее физического смысла, но отличается определенной общностью для всех физических величин. Эту форму представления производной физической величины называют размерностью и обозначают - $[x]$.

Размерность – символическое выражение единицы величины через основные единицы, показывающее соотношение между их размерами без указания этих размеров.

Так как размер $\{x\}$ и размерность выражают по-разному, но одну и ту же единицу измерения, то

$$\{x\} = [x]. \quad (1.11)$$

Основная единица обозначается либо символом соответствующей физической величины Y , например, длина L , время T , либо специальным символом, представляющим сокращенно ее название, например, единица длины метр - м, единица времени секунда - с. Первое обозначение преимущественно используется в формулах размерностей $[y] = Y$, второе - при конкретизации единиц физических величин.

Производная единица обозначается, либо символом представляющем ее название $\{x\}$ = «название» (единица силы ньютон - Н, работа джоуль - Дж), либо - символом единиц определяющего уравнения (единица скорости м/с, давления Н/м²). В формулах размерностей используется общее обозначение $[x]$.

Если в правой части определяющего уравнения содержатся только размеры основных физических величин, то из

$$\{x\} = \{y_1\}^{a_1} \{y_2\}^{a_2} \dots \{x_1\}^{b_1} \{x_2\}^{b_2} \dots$$

при условии $\{x\} = [x]$ и $b_1 = b_2 = \dots = 0$

получим формулу размерности:

$$[x] = [y_1]^{a_1} [y_2]^{a_2} \dots \quad (1.12)$$

Например, для единицы скорости

$$\{v\} = \{l\} \{t\}^{-1}, \quad [v] = [l] [t]^{-1}$$

В общем случае формулы размера и размерности различны, например, для единицы силы в

СИ

$$\{F\} = \text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с})/\text{с}, \quad [F] = LMT^{-2}.$$

Различают физические величины однородные, одноименные и безразмерные:

Однородные – имеют одинаковую размерность и одинаковый физический смысл.

Пример: координаты точек тела и его физический размер.

Одноименные – имеют одинаковую размерность, но разный физический смысл.

Пример:

работа $A = F \cdot s \cdot \cos(a)$,

энергия $E_k = 1/2 m v^2$ или $E_n = mgh$,

момент силы $M = F \cdot r \cdot \sin(a)$

имеют вид $[ML^2T^{-2}]$.

Безразмерные – размерность равна единице $[x] = [y_1]^0 [y_2]^0 \dots = 1$, $x = x^\circ$ и не зависят от выбора системы единиц.

Пример: относительные изменения любой величины – безразмерная величина Dx/x , отношение дуги окружности к радиусу и т.д.

Все величины, не являющимися безразмерными, называются размерными.

Формула размерности (соотношение между единицами измерения величины и основными единицами) любой физической величины однозначно определяется выбором основных единиц измерения и определяющего уравнения. В то же время, одна и та же формула размерности может соответствовать различным физическим величинам.

Степенные комплексы

Степенным комплексом называется функция следующего вида $y = x_1^a \cdot x_2^b \cdot \dots \cdot x_n^w$.

Основные свойства степенных комплексов:

Число простых степенных комплексов, образованных из некоторых величин, не превышает количество этих величин. Составными называются комплексы, получаемые на основе простых.

Пример:

$$\{x_1 x_2 x_3\}$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= x_1 x_2 \\ k_2 &= x_1 x_2^2 x_3 \\ k_3 &= x_1^2 x_2^3 x_3 \\ k_4 &= x_1^3 x_2^4 x_3 \end{aligned} \right\} k_i = f(k_1 \mathbf{K} k_{i-1})$$

$$k_1 = x_1 x_2 \Rightarrow x_1 = k_1 / x_2$$

$$k_2 = x_1 x_2^2 x_3 \Rightarrow x_2 x_3 = k_2 / k_1$$

$$k_3 = x_1^2 x_2^3 x_3 \Rightarrow k_3 = k_1 k_2$$

$$k_4 = x_1^3 x_2^4 x_3 \Rightarrow k_4 = k_1^2 k_2$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= x_1 x_2 \\ k_2 &= x_1 x_2^2 x_3 \end{aligned} \right\} \text{простые критерии}$$

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= k_1 k_2 \\ k_4 &= k_1^2 k_2 \end{aligned} \right\} \text{составные критерии}$$

Любая функция может быть представлена в виде функции степенного комплекса

$$y = \frac{e^{x_1}}{x_2 \cdot x_3 + \sin(x_3 \cdot x_4)} = \frac{e^{k_1}}{k_2 + \sin k_3}$$

Любую безразмерную функцию размерных величин можно представить в виде функции безразмерных степенных комплексов, образованных из этих величин.

$$m_y = \frac{y_1 / y_3}{y_2 / y_3}, \quad [y_i] = [L], \quad [m_y] = [1]$$

$$\frac{[L][L^{-1}]}{[L][L^{-1}]} \quad k_1 = y_1 \cdot y_3^{-1} \quad k_2 = y_2 \cdot y_3^{-1} \Rightarrow m_y = \frac{k_1}{k_2}$$

Любую размерную функцию размерных величин можно представить в виде произведения размерного степенного комплекса, составленного из этих величин и безразмерной функции этих же величин.

$$y = F(x_1 x_2 \dots x_n)$$

$$[y] \neq [1]$$

$$[x_i] = [1] \quad i = 1 \dots n$$

$$[y] = [k]$$

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = k^\Phi \Phi(x_1 x_2 \dots x_n), \text{ где } [\Phi] = 1$$

Безразмерные величины

1) Константа подобия – это такая безразмерная физическая величина, у которых базовой физической величиной является величина с фиксированным размером. Такой базовой физической величиной может быть фундаментальная физическая константа

(например, электродинамическая постоянная, элементарный электрический заряд, число Авогадро и т.п.).

2) Параметрический критерий подобия – это такая безразмерная физическая величина, у которой базовой физической величиной является характерный и общеизвестный параметр.

Например, при оценке величины перегрузки силами инерции при движении летательных аппаратов в качестве характерного значения ускорения принимают ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ и параметрический критерий подобия называют критерием перегрузки.

Другой пример: для оценки скорости летательного аппарата в качестве базовой физической величины применяют скорость звука в воздухе.

3) И лишь в том случае, когда базовая физическая величина является не постоянной и не фиксируемой физической величиной, а представляет собой комбинацию физических величин, то переходят к рассмотрению такой категории, как критерии подобия. Таким образом, если уточнить определение, то критерии подобия – это отношения двух однородных физических величин, изменяющихся независимо друг от друга.

Наиболее известный пример критерия подобия – это критерий Рейнольдса Re , равный отношению сил инерции движущегося текучего вещества к сумме сил внутреннего и внешнего трения.

Другой пример: коэффициент трения скольжения f , равный отношению силы прижима поверхностей соприкасающихся тел друг к другу к силе сопротивления, возникающей при относительном сдвиге этих тел. В этом случае сила сопротивления зависит как от сдвигающей силы, так и от силы прижима.

Критерии подобия

Основной характеристикой подобных объектов являются критерии подобия, с помощью которых устанавливаются закономерности взаимодуозначного соответствия модели и оригинала.

Критерии подобия – это идентичные по форме алгебраической записи и равные численно для подобных объектов безразмерные степенные комплексы определенных групп параметров, характеризующих эти объекты.

Пусть объект описывается уравнением $F(p_1 p_2 \dots p_n) = 0$.

F – функциональная зависимость между параметрами объекта, p_i – параметры объекта.

Данное уравнение – полное физическое уравнение, характеризующее объект во всех ситуациях.

В частных случаях некоторые параметры при некоторых условиях остаются постоянными, тогда данное уравнение будет называться неполным физическим уравнением.

$$F(p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n) = 0.$$

$\{ p_1 \dots p_n \}$ – все параметры

$\{ p_1 \dots p_k \}$ – группа независимых параметров

$\{ p_{k+1} \dots p_n \}$ – группа зависимых параметров

n – общее количество всех параметров;

k – количество независимых параметров, которое определяется как ранг матрицы, состоящей из степеней единиц измерения параметров;

$(n-k)$ – количество зависимых параметров, количество критериев подобия для данной системы $i = 1, n-k$.

Критерии подобия могут быть установлены при известном и неизвестном математическом описании объекта.

Определение критериев подобия при известном математическом описании

Пусть объект описывается уравнением (уравнение – размерная величина).

(Любую размерную величину можно представить в виде произведения степенного комплекса размерной величины и безразмерной функции этих же величин)

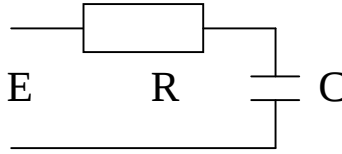
$$F(p_1, p_2 \dots p_n) = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n} \cdot \Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

$$\Phi(p_1 p_2 \dots p_n) = 0$$

Из свойств степенных комплексов безразмерная функция размерных величин может быть представлена в виде функции безразмерных степенных комплексов:

$$\Phi(p_1 p_2 \dots p_n) = \varphi(\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n), \text{ где } \varphi(\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n) = 0 \text{ критериальное уравнение.}$$

Пример I (RC):



Для конкретного процесса $u_c(t)$ изменения напряжения u_c во времени t на конденсаторе C в последовательной цепи из конденсатора и активного сопротивления R , которая включается на постоянное напряжение E , при нулевых начальных условиях. При различных значениях R , C , и E процессы $u_c(t)$ заведомо будут иметь качественно одинаковый характер, что позволяет рассматривать их как группу подобных процессов. Переходный процесс описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c - E = 0$$

Решение которого имеет вид:

$$u_c = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Согласно правилу Фурье все члены уравнения, описывающего какой-либо физический процесс, имеют одинаковую размерность. Поэтому уравнение можно привести к безразмерному виду, если разделить его на один из членов, здесь u_c :

$$\left(\frac{RC}{u_c} \right) \left(\frac{du_c}{dt} \right) + 1 - \left(\frac{E}{u_c} \right) = 0,$$

если обозначить $p'_1 = \frac{RC}{u_c} \cdot \frac{du_c}{dt}$ и $p'_2 = \frac{E}{u_c}$, то формула примет вид:

$$p'_1 + 1 - p'_2 = 0$$

Способ интегральных оценок (интегральных аналогов) – способ определения критериев подобия по известному математическому описанию процесса путем приведения его к безразмерному виду, при котором символы дифференцирования и интегрирования в выражениях для определения критериев подобия опускаются.

Вообще, существует две системы критериев подобия: первая – получаемая из дифференциального уравнения, вторая – из решения (общего интеграла) дифференциального уравнения. Однако обе системы критериев подобия идентичны, т.к. имеют одинаковый физический смысл.

Таким образом, можно записать π_1' и π_2' в виде:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{RC}{u_c} \cdot \frac{u_c}{t} = \frac{RC}{t} = R^1 C^1 t^{-1} u_c^0 E^0 \\ p_2 &= \frac{E}{u_c} = E^1 u_c^{-1} R^0 C^0 t^0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5a)$$

Выражения для p_1 и p_2 , имеющие вид безразмерных степенных комплексов параметров, характеризующих рассматриваемый процесс, называются критериями подобия; критерии подобия численно одинаковы для сходственных точек подобных процессов.

В общем виде, пусть математическое описание группы заведомо подобных процессов известно и выглядит, например, как линейное дифференциальное уравнение,

$$A_n \frac{d^n j(x)}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} j(x)}{dx^{n-1}} + \dots + A_0 j(x) = \sum_{i=n}^{i=0} A_i \frac{d^i j(x)}{dx^i} = 0 \quad (3.1)$$

решение которого (общий интеграл имеет вид):

$$j(x) = B_1 e^{l_1(x)} + B_2 e^{l_2(x)} + \dots + B_n e^{l_n(x)} = \sum_{j=1}^n B_j e^{l_j(x)} \quad (3.2)$$

Приведём к безразмерному виду (3.1) путем деления на первый член:

$$1 + p'_1 + \dots + p'_{n-1} = 1 + \sum_{j=1}^n p'_j = 0 \quad (3.3)$$

Преобразования, аналогичные рассмотренному примеру, позволяют получить для (3.3) систему критериев подобия вида:

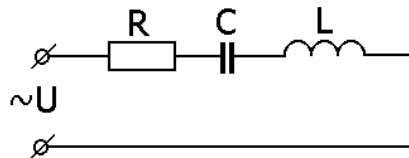
$$p_j = c_j P_1^{a_j} L P_m^{w_j}, j = 1, (n-1), \quad (3.4)$$

$P_1, \dots, P_m$ – параметры рассматриваемого процесса, ($P_i = x$); $c_j, a_j, \dots, w_j$ – безразмерные числа, принимающие некоторые действительные, в том числе нулевые, значения.

Критерии подобия имеют вид безразмерных степенных комплексов параметров, которые характеризуют процесс.

Пример II (RLC):

Пусть процесс, происходящий в цепи описывается уравнением:



$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{c} \cdot i + R \cdot \frac{di}{dt} = U \cdot \sin \omega \cdot t.$$

Шаг 1.

Тогда параметры, описывающие систему $L, c, R, \omega, i, u, t, \frac{d^2 i}{dt^2}$ и $\frac{di}{dt}$.

С точки зрения подобия (для вывода критерия подобия) (согласно способу интегральных оценок)

$$\frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t} \approx \frac{i}{t}; \quad \frac{d^2 i}{dt^2} \approx \frac{\Delta i^2}{\Delta t^2} \approx \frac{i}{t^2}.$$

Следовательно, в описании системы $\frac{d^2 i}{dt^2}$ и $\frac{di}{dt}$ – лишние параметры, тогда полный набор параметров $P = \{i, u, t, L, c, R, \omega\}$, $n=7$.

Шаг 2.

Для определения количества критериев запишем размерность каждого параметра через основные единицы измерения L, M, T, I :

$$\begin{array}{l} [i] = [L^0 M^0 T^0 I^1] \\ [u] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}] \\ [t] = [L^0 M^0 T^1 I^0] \\ [L] = [L^2 M^1 T^{-2} I^{-2}] \Rightarrow A = \\ [c] = [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2] \\ [R] = [L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}] \\ [w] = [L^0 M^0 T^{-1} I^0] \end{array} \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \quad \leftarrow \end{array}$$

откидываем как зависимую строку последнюю

(т.к. ранг матрицы определяется количеством независимых параметров).

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (1) \\ 2 & 1 & -3 & -1 & (2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (3) \\ 2 & 1 & -2 & -2 & (4) \\ -2 & -1 & 4 & 2 & (5) \\ 2 & 1 & -3 & -2 & (6) \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (1) \\ 2 & 1 & -3 & -1 & (2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (3) \\ 2 & 1 & -2 & -2 & (4) \\ -2 & -1 & 4 & 2 & (5) \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (1) \\ 2 & 1 & -3 & -1 & (2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (3) \\ -2 & -1 & 4 & 2 & (5) \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & (1) \\ 2 & -3 & -1 & (2) \\ 0 & 1 & 0 & (3) \\ -2 & 4 & 2 & (5) \end{array} \right| \end{array}$$

Шаг 3.

Откидываем как зависимые строки: (6) [(4)-(3) = (6)], (4) [(2)-(1)+(3)=(4)],

а также 2-ой столбец, тогда максимальный возможный ранг матрицы = 3.

Так как определитель матрицы $\neq 0$, тогда ранг матрицы 3, соответственно количество независимых параметров $k = 3$, тогда количество критериев

$$m = (n-k) = (7-3) = 4.$$

Шаг 4.

Исходное уравнение перепишем с учетом способа интегральных оценок:

$$L \cdot \frac{i}{t^2} + \frac{1}{c} \cdot i + R \cdot \frac{i}{t} - u \cdot \sin w \cdot t = 0,$$

где каждое из слагаемых имеет одинаковую размерность.

Поделим уравнение на 2-ое слагаемое, получим:

$$\frac{L \cdot c}{t^2} + \frac{R \cdot c}{t} - \frac{c \cdot u \cdot \sin w \cdot t}{i} + 1 = 0,$$

тогда критерии имеют вид:

$$p_1 = \frac{Lc}{t^2} = Lct^{-2}; \quad p_2 = \frac{Rc}{t} = Rct^{-1}; \quad p_3 = \frac{cu}{i} = cui^{-1}; \quad p_4 = wt.$$

Критериальное уравнение:

$$p_1 + p_2 - p_3 \cdot \sin p_4 + 1 = 0$$

Определение критериев подобия при неизвестном математическом описании

1 шаг: Выявление параметров P_i , характеризующих процесс, $i = \overline{1, n}$.

2 шаг: Составление полной матрицы размерности параметров P_i (матрица A).

3 шаг: Определение количества зависимых и независимых параметров ($k, m = n-k$).

4 шаг: Любой зависимый параметр может быть представлен как

$$P_j = p_j P_1^{x_j} P_2^{y_j} \mathbf{K} P_k^{z_j} \Rightarrow p_j = \frac{P_j}{P_1^{x_j} P_2^{y_j} \mathbf{K} P_k^{z_j}}, \quad \text{где } j = \overline{1, n}.$$

Если неизвестны математические описания процессов, критерии также можно получить.

Для этого функциональную зависимость, полученную из эксперимента или расчета и имеющую в размерных физических величинах $P_1, \dots, P_j, \dots, P_n$ вид:

$$F(P_1, \dots, P_j, \dots, P_n) = 0$$

$$F_p(p_1, p_2, \dots, p_{n-k}) = 0$$

где $p_1, p_2, \dots, p_{n-k}$ – критерии подобия.

или для рассмотренного примера I (RC)

$$F_p(p_1 = RC/t, p_2 = E/u_c) = 0,$$

Для определения критериев подобия в данном случае применяется метод анализа размерностей физических величин P_j , определяющих характер процесса. Возможность установления критериев подобия, когда вид функциональной зависимости неизвестен, создает предпосылки для представления данных экспериментального исследования в обобщенной форме и

распространения результатов единичного эксперимента на группу или класс подобных процессов.

Допустим, что в качестве основных единиц измерения выбраны $[a \ b \dots q]$, тогда

размерность 1-го параметра $[P_1] = [a^{a_1} b^{a_2} \dots q^{a_L}]$,

размерность 2-го параметра $[P_2] = [a^{b_1} b^{b_2} \dots q^{b_L}]$,

...

размерность n-го параметра $[P_n] = [a^{w_1} b^{w_2} \dots q^{w_L}]$,

где L – количество единиц измерения.

Рассмотрим уравнения с точки зрения размерности.

$[a^{g_1} b^{g_2} \dots q^{g_L}] = [1][a^{a_1} b^{a_2} \dots q^{a_L}]^{x_j} \cdot [a^{b_1} b^{b_2} \dots q^{b_L}]^{y_j} \cdot \dots \cdot [a^{s_1} b^{s_2} \dots q^{s_L}]^{z_j}$ – уравнение для π_j ,

где g, a_i, b_i, s_i – известные, x_j, y_j, z_j – неизвестные величины.

$$\begin{cases} g_1 = a_1 x_j + b_1 y_j + \mathbf{K} + s_1 z_j \\ g_2 = a_2 x_j + b_2 y_j + \mathbf{K} + s_2 z_j \\ \dots \\ g_L = a_L x_j + b_L y_j + \mathbf{K} + s_L z_j \end{cases}$$

$j \rightarrow g$

$1 \rightarrow a$

$2 \rightarrow b$

$k \rightarrow s$

$n \rightarrow w$

Решив эти уравнения, находим критерии подобия по формулам:

$$p_1 = \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} P_2^{y_1} \dots P_k^{z_1}}, p_2 = \frac{P_{k+2}}{P_1^{x_2} P_2^{y_2} \dots P_k^{z_2}}, \dots p_m = \frac{P_{k+m}}{P_1^{x_m} P_2^{y_m} \dots P_k^{z_m}}.$$

Пример: Математическое описание не известно.

1. Определим по методике вектор параметров

$$P = \{i, U, t, L, c, R, w\}, \quad n = 7$$

2,3. см. выше $k=3, m=4$.

Группа независимых параметров (можно выбрать любые): $[U, R, c]$.

Группа зависимых параметров $[i, t, L, w]$.

4. По формуле находим 4 критерия подобия:

$$p_1 = \frac{i}{U^{x_1} R^{y_1} c^{z_1}}, p_2 = \frac{t}{U^{x_2} R^{y_2} c^{z_2}}, p_3 = \frac{L}{U^{x_3} R^{y_3} c^{z_3}}, p_4 = \frac{w}{U^{x_4} R^{y_4} c^{z_4}}.$$

Определим p_1 :

$$[i] = [p_1][U^{x_1} R^{y_1} c^{z_1}]$$

$$[L^0 M^0 T^0 I^1] = [1][L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]^{x_1} [L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}]^{y_1} [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2]^{z_1}$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 - \text{степени при L} \\ x_1 + y_1 - z_1 = 0 - \text{при M} \\ -3x_1 - 3y_1 + 4z_1 = 0 - \text{при T} \\ -x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 1 - \text{при I} \end{cases}$$

Так как 1 и 2 уравнения зависимые, то получим следующую совместную систему:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 - 3y_1 + 4z_1 = 0 \\ -x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

Определим π_2 :

$$[t] = [p_2][U^{x_2} R^{y_2} c^{z_2}]$$

$$[L^0 M^0 T^1 I^0] = [1][L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]^{x_2} [L^1 M^1 T^{-3} I^{-2}]^{y_2} [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2]^{z_2}$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 - 3y_2 + 4z_2 = 1 \\ -x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

Так как 1 и 2 уравнения зависимые, то получим следующую совместную систему:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 - 3y_2 + 4z_2 = 1 \\ -x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Определим p_3 :

$$[L] = [p_3][U^{x_3} R^{y_3} c^{z_3}]$$

$$[L^2 M^1 T^{-2} I^{-2}] = [1][L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]^{x_3} [L^1 M^1 T^{-3} I^{-2}]^{y_3} [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2]^{z_3}$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_3 + 2y_3 - 2z_3 = 2 \\ x_3 + y_3 - z_3 = 1 \\ -3x_3 - 3y_3 + 4z_3 = -2 \\ -x_3 - 2y_3 + 2z_3 = -2 \end{cases}$$

Так как 1 и 2 уравнения зависимые, то получим следующую совместную систему:

$$\begin{cases} x_3 + y_3 - z_3 = 1 \\ -3x_3 - 3y_3 + 4z_3 = -2 \\ -x_3 - 2y_3 + 2z_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 2 \\ z_3 = 1 \end{cases}$$

Определим p_4 :

$$[w] = [p_4][U^{x_4} R^{y_4} c^{z_4}]$$

$$[L^0 M^0 T^{-1} I^0] = [1][L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]^{x_4} [L^1 M^1 T^{-3} I^{-2}]^{y_4} [L^{-2} M^{-1} T^4 I^2]^{z_4}$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_4 + 2y_4 - 2z_4 = 0 \\ x_4 + y_4 - z_4 = 0 \\ -3x_4 - 3y_4 + 4z_4 = -1 \\ -x_4 - 2y_4 + 2z_4 = 0 \end{cases}$$

Так как 1 и 2 уравнения зависимые, то получим следующую совместную систему:

$$\begin{cases} x_4 + y_4 - z_4 = 0 \\ -3x_4 - 3y_4 + 4z_4 = -1 \\ -x_4 - 2y_4 + 2z_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ y_4 = -1 \\ z_4 = -1 \end{cases}$$

Найдем виды критериев по формуле:

$$p_m = \frac{P_{k+m}}{P_1^{x_m} P_2^{y_m} \dots P_k^{z_m}},$$

$$x_1 = 1, y_1 = -1, z_1 = 0$$

$$p_1 = \frac{i}{UR^{-1}} = \frac{iR}{U}$$

$$x_2 = 0, y_2 = 1, z_2 = 1$$

$$p_2 = \frac{t}{Rc}$$

$$x_3 = 0, y_3 = 2, z_3 = 1$$

$$p_3 = \frac{L}{R^2 c}$$

$$x_4 = 0, y_4 = -1, z_4 = -1$$

$$p_4 = \frac{w}{R^{-1} c^{-1}} = wRc.$$

Рассмотренные положения относятся к случаю заведомо подобных процессов, т.е. определяют необходимые условия существования подобия. В связи с этим возникает вопрос об условиях, не только необходимых, но и достаточных для существования подобия. Такие обстоятельства, кроме равенства критериев, включают в себя требования подобия начальных и граничных условий сопоставляемых процессов.

Положения относительно необходимых и достаточных условий подобия изложены в виде первой, второй и третьей теорем о подобии, первые две – определяют необходимые, третья – необходимые и достаточные условия подобия.

Основные теоремы теории подобия

Теория подобия включает три основные теоремы: 1-ая теорема подобия (Теорема Ньютона-Бертранса) о необходимом условии подобия, 2-ая теорема подобия (Пи-теорема), 3-ая теорема подобия (Теорема Кирпичова-Гухмана) о необходимом и достаточном условии подобия.

Первая теорема подобия и ее применение при определении критериев подобия.

Для того чтобы явления были подобны в том или ином смысле (полно, приближенно, физически, математически и т.д.), необходимо чтобы определенное сочетание параметров, называемых критериями подобия, имели сходственную алгебраическую форму и одинаковые численные значения (без доказательства).

Первая теорема формулирует необходимые условия существования подобия (одинаковые критерии подобия), но не указывает способы установления подобия и способы его реализации при построении моделей.

Практическое применение:

- Определить параметры для двух сравниваемых объектов.
- Выделить группу независимых параметров и определить количество критериев.
- Получить выражение для критериев подобия и сравнить их для двух определяемых объектов.
- Если алгебраические формы критериев подобия для сравниваемых объектов совпадают, то необходимо вычислить их численные значения для определенных точек пространства параметров. Одинаковые численные значения критериев позволяют судить о подобии этих объектов.

Основной практический вывод первой теоремы подобия:

Число критериев подобия, найденных приведением к безразмерному виду, на единицу меньше числа членов, входящих в уравнение,

$$m = N - 1.$$

Определение критериев подобия по уравнениям исследуемых процессов

Возможны два случая описания исследуемого процесса:

- 1) Все члены уравнения – однородные функции параметров, определяющих протекание этого процесса, и их производных.

Справка: В математическом анализе функция $f(x_1, \dots, x_n)$ от n аргументов, определенная в области D , называется однородной функцией k -ой степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель M она приобретает тот же множитель M в k -ой степени, т.е. если тождественно выполняется равенство:

$$f(Mx_1, \dots, Mx_n) = M^k f(x_1, \dots, x_n).$$

При этом, все члены уравнения имеют общий множитель, который может быть вынесен за знак функциональной зависимости.

- 2) Часть членов уравнения – неоднородные функции параметров, не допускающие вынос за знак функции общего множителя

(например: $\sin(\omega t + j)$, $\exp(-t/\tau)$)

Определение критериев подобия процессов, описываемых уравнениями, содержащими только однородные функции

Рассматриваются необходимые для определения критериев подобия преобразования, одновременно пример преобразования уравнения переходного процесса $i(t)$ в последовательной цепи из активного сопротивления R и индуктивности L , которая включается на постоянное напряжение u .

Имеются уравнения двух подобных процессов j_0 и F_0 , являющихся функциями параметров $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$ и $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n$ соответственно, то есть в общем случае:

$$j_1 + K + j_i + K + j_m = \sum_{i=1}^m j_i = 0 \quad (3.5), (3.6)$$

$$\Phi_1 + K + \Phi_i + K + \Phi_m = \sum_{i=1}^m \Phi_i = 0$$

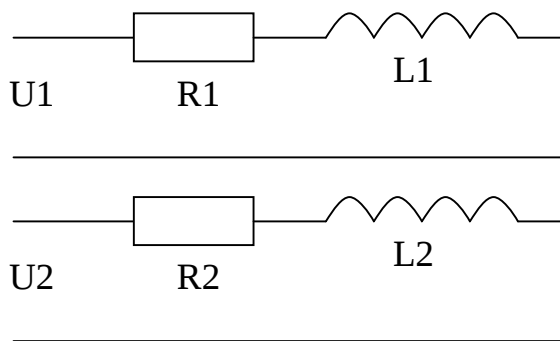
или

$$j_i = f_i(P_1, K, P_n) \quad (3.7)$$

$$\Phi_i = f_i(R_1, K, R_n)$$

члены уравнений для j_0 и F_0 ; $i = 1, 2, \dots, m$.

Пример III (RL):



уравнения двух переходных процессов – это два дифференциальных уравнения:

$$i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt_1} - u_1 = j_1 + j_2 + j_3 = \sum_{i=1}^3 j_i = 0 \quad (3.5a)$$

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt_2} - u_2 = F_1 + F_2 + F_3 = \sum_{i=1}^3 F_i = 0 \quad (3.6a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= i_1 R_1 = f_1(i_1, t_1, R_1, L_1, u_1) \\ j_2 &= L_1 \frac{di_1}{dt_1} = f_2(i_1, t_1, R_1, L_1, u_1) \\ \text{L L L L L L L L L L L L} \\ \Phi_3 &= -u_2 = f_3(i_2, t_2, R_2, L_2, u_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.7a)$$

Сопоставляемые процессы j_0 и F_0 подобны, следовательно, между их сходственными параметрами должны существовать соотношения пропорциональности вида:

$$P_1 = m_1 R_1, \dots, P_j = m_j R_j, \dots, P_n = m_n R_n \quad (3.8)$$

или

$$R_1 = m_R R_2; \quad L_1 = m_L L_2; \quad u_1 = m_u u_2; \quad (3.8a)$$

$$i_1 = m_i i_2; \quad t_1 = m_t t_2$$

где $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$ или m_R, m_L, m_i и m_t – масштабные коэффициенты.

В соответствии с первой теоремой подобия для подобных процессов j_0 и F_0 , все члены уравнений которых однородные функции, должны существовать одинаковые критерии подобия. Их отыскивают приведением уравнения к безразмерному виду.

К безразмерному виду уравнения приводятся делением их на какой либо, например на первый, член (j_1 и F_1):

$$1 + \frac{j_2}{j_1} + \mathbf{K} + \frac{j_i}{j_1} + \mathbf{K} + \frac{j_m}{j_1} = \sum_{i=1}^m \frac{j_i}{j_1} = 0 \quad (3.9)$$

$$1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} + \mathbf{K} + \frac{\Phi_i}{\Phi_1} + \mathbf{K} + \frac{\Phi_m}{\Phi_1} = \sum_{i=1}^m \frac{\Phi_i}{\Phi_1} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{j_1}{j_1} + \frac{j_2}{j_1} + \frac{j_3}{j_1} = \frac{i_1 R_1}{i_1 R_1} + \frac{L_1 di_1}{i_1 R_1 dt_1} - \frac{u_1}{i_1 R_1} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_1} + \frac{\Phi_2}{\Phi_1} + \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{i_2 R_2}{i_2 R_2} + \frac{L_2 di_2}{i_2 R_2 dt_2} - \frac{u_2}{i_2 R_2} = 0 \quad (3.10a)$$

Вследствие однородности (3.5) и (3.6) в выражениях для j_i и F_i существуют некоторые общие множители, которые можно вынести за знак функции. Общий множитель для i -го члена j_i исходного уравнения (3.5) – некоторая комбинация масштабных коэффициентов $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$, т.е. в соответствии с (3.7) и (3.8):

$$j_i = f_i(P_1, \dots, P_j, \dots, P_n) = f_i(m_1 R_1, \dots, m_j R_j, \dots, m_n R_n) = M_i f_i(R_1, \dots, R_j, \dots, R_n) = M_i F_i \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= i_1 R_1 = m_i i_2 m_R R_2 = m_i m_R i_2 R_2 = M_1 \Phi_1 \\ j_2 &= L_1 \frac{di_1}{dt} = m_L L_2 \frac{dm_i i_2}{dm_i dt_2} = \frac{m_L m_i}{m_i} L_2 \frac{di_2}{dt_2} = M_2 \Phi_2 \\ j_3 &= -u_1 = -m_u u_2 = M_3 \Phi_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.11a)$$

Подстановка (3.11) в (3.9) дает

$$1 + \frac{M_2 \Phi_2}{M_1 \Phi_1} + \mathbf{L} + \frac{M_i \Phi_i}{M_1 \Phi_1} + \mathbf{L} + \frac{M_m \Phi_m}{M_1 \Phi_1} = 0 \quad (3.12)$$

$$1 + \frac{m_L m_i}{m_i m_R m_t} \frac{L_2}{i_2 R_2} \frac{di_2}{dt_2} - \frac{m_u}{m_i m_R} \frac{u_2}{i_2 R_2} = 0 \quad (3.12a)$$

Поскольку уравнение (3.12) представляет собой сумму однородных функций, должен существовать общий для всех его членов множитель M_m :

$$M_1 = \dots = M_i = \dots = M_{m-1} = M_m \quad (3.13)$$

или

$$1 = M_1/M_1 = M_2/M_1 = \dots = M_i/M_1 = \dots = M_{m-1}/M_1 = M_m/M_1 \quad (3.14)$$

Это означает, что

$$1 = m_L/(m_R m_t) = m_u/(m_i m_R) \quad (3.14a)$$

Эти уравнения называются масштабными уравнениями.

Физический смысл результата: как исходное уравнение (3.5a), так и преобразованное (3.12a) описывают процесс j_0 , т.е. переходный процесс $i_1(t_1)$. Подобие процессов j_0 и F_0 означает, что они должны описываться одинаковыми уравнениями, так как имеют одинаковый качественный характер и различаются только масштабами.

Вывод: формула (3.12a) будет описывать F_0 – переходный процесс $i_2(t_2)$ – только в том случае, если будут равны единице комбинации масштабных коэффициентов при втором и третьем членах (3.12a).

Тождественность (3.12) и (3.9) означает, что между соответственными членами (3.5) и (3.6) существуют отношения:

$$j_2/j_1 = F_2/F_1, \dots, j_i/j_1 = F_i/F_1, \dots, j_{m-1}/j_1 = F_{m-1}/F_1, j_m/j_1 = F_m/F_1 \quad (3.15)$$

Обобщая (3.15) на произвольное число s подобных процессов, уравнения которых содержат только однородные функции, можно записать:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{j_2^{(1)}}{j_1^{(1)}} = \frac{j_2^{(2)}}{j_1^{(2)}} = \mathbf{K} = \frac{j_2^{(s)}}{j_1^{(s)}} = p_1 = idem \\ \mathbf{L L L L L L L L L L L L} \\ \frac{j_i^{(1)}}{j_1^{(1)}} = \frac{j_i^{(2)}}{j_1^{(2)}} = \mathbf{K} = \frac{j_i^{(s)}}{j_1^{(s)}} = p_{i-1} = idem \\ \mathbf{L L L L L L L L L L L L} \\ \frac{j_m^{(1)}}{j_1^{(1)}} = \frac{j_m^{(2)}}{j_1^{(2)}} = \mathbf{K} = \frac{j_m^{(s)}}{j_1^{(s)}} = p_{m-1} = idem \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

где (1), (2), (i), ..., (s) номера сопоставляемых процессов, *idem* – означает «соответственно одинаково для всех рассматриваемых процессов».

Для рассматриваемого процесса:

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{L_1}{i_1 R_1} \cdot \frac{di_1}{dt_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L_2}{i_2 R_2} \cdot \frac{di_2}{dt_2} = p_1 = idem$$

$$\frac{j_3}{j_1} = \frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{F_3}{F_1} = \frac{u_2}{i_2 R_2} = p_2 = idem$$

В общем случае соотношения пропорциональности вида (3.8) справедливы на любых (и малых, и больших) интервалах изменения сопоставляемых функций. Поэтому символы дифференцирования и интегрирования при рассмотрении условий пропорциональности можно опустить, так как они не имеют размерности и не влияют на условия пропорциональности, заменив соответствующие члены уравнений j_j на их аналоги j_j^* , которые называются интегральными, т.е. заменить $d^n x / dy^n$ на x / y^n и $\partial x dy$ на xy .

Для рассмотренного примера:

$$j_2^* = L_1(i_1/t_1); j_1^* = i_1 R_1; p_1 = j_2^*/j_1^* = L_1 i_1 / i_1 R_1 t_1 = L_1 / R_1 t_1$$

где j_2^* и j_1^* аналоги j_2 и j_1 .

Опуская индексы номеров процесса (1), (2), ..., (s), можно с учетом (3.14) записать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{j_2}{j_1} = p_1 = \text{idem}; \mathbf{K}; \frac{j_i}{j_1} = p_{i-1} = \text{idem}; \mathbf{K} \frac{j_m}{j_1} = p_{m-1} = \text{idem}; \\ \frac{j_2^*}{j_1^*} = p_1 = \text{idem}; \mathbf{K}; \frac{j_i^*}{j_1^*} = p_{i-1} = \text{idem}; \mathbf{K} \frac{j_m^*}{j_1^*} = p_{m-1} = \text{idem} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_2}{M_1} = I_{p_1} = 1; \mathbf{K} \frac{M_i}{M_1} = I_{p_{i-1}} = 1; \mathbf{K} \frac{M_m}{M_1} = I_{p_{m-1}} = 1; \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

где $j_1, \dots, j_m$ - члены исходного уравнения (3.5); $j_1^*, \dots, j_m^*$ - интегральные аналоги $j_1, \dots, j_m$; $M_1, \dots, M_m$ - комбинация (произведения или отношения) масштабных коэффициентов.

Выражения (3.17) для критериев подобия, иногда называемые **инвариантами подобия**, имеют вид безразмерных степенных комплексов:

$$p_i = P_1^{z_1} \mathbf{K} P_j^{z_j} \mathbf{K} P_n^{z_n} = \text{idem} \quad (3.19)$$

Применительно к примеру:

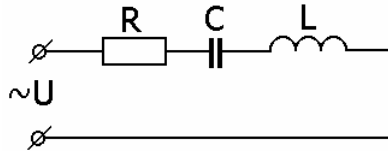
$$p_1 = L/Rt = L^1 R^{-1} t^{-1} = L^1 R^{-1} t^{-1} u^0 = \text{idem} \quad (3.17a)$$

$$p_2 = u/iR = u^1 i^{-1} R^{-1} = L^0 R^{-1} t^0 i^{-1} u^1 = \text{idem}$$

$$m_L/m_R m_t = I_{p_1} = 1; m_u/m_i m_R = I_{p_2} = 1 \quad (3.18a)$$

Последние уравнения являются масштабными уравнениями.

Для примера II (RLC):



$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i + R \cdot \frac{di}{dt} = U \cdot \sin w \cdot t$$

Пусть есть два процесса с параметрами:

$$\{L_1, R_1, c_1, t_1, i_1, U_1, \omega_1\} = P_1$$

$$\{L_2, R_2, c_2, t_2, i_2, U_2, \omega_2\} = P_2$$

По каждому из параметров введены определенные масштабные коэффициенты

$$m_L = \frac{L_2}{L_1}, m_R = \frac{R_2}{R_1}, m_c = \frac{c_2}{c_1}, m_t = \frac{t_2}{t_1}, m_i = \frac{i_2}{i_1}, m_U = \frac{U_2}{U_1}, m_w = \frac{w_2}{w_1}.$$

Воспользуемся ранее выведенными критериями, но по принципу размерности.

$$1) p_1 = \frac{i}{UR^{-1}} = \frac{iR}{U} \quad 2) p_2 = \frac{t}{Rc} \quad 3) p_3 = \frac{L}{R^2 c} \quad 4) p_4 = \frac{w}{R^{-1} c^{-1}} = wRc.$$

Группа независимых параметров [U, R, c].

Для 1-ой системы

$$p_1' = \frac{i_1 R_1}{U_1}, p_2' = \frac{t_1}{R_1 c_1}, p_3' = \frac{L_1}{R_1^2 c_1}, p_4' = w_1 R_1 c_1.$$

Для 2-ой системы с учетом масштабов:

$$p_1'' = \frac{m_i i_1 m_R R_1}{m_U U_1}, p_2'' = \frac{m_t t_1}{m_R R_1 m_c c_1}, p_3'' = \frac{m_L L_1}{m_R^2 R_1^2 m_c c_1}, p_4'' = m_w w_1 m_R R_1 m_c c_1.$$

$$p_1'' = \frac{m_i m_R}{m_U} \cdot \frac{i_1 R_1}{U_1}, p_2'' = \frac{m_t}{m_R m_c} \cdot \frac{t_1}{R_1 c_1}, p_3'' = \frac{m_L}{m_L^2 m_c} \cdot \frac{L_1}{R_1^2 c_1}, p_4'' = m_w m_R m_c \cdot w_1 R_1 c_1.$$

$\forall \pi_i = \text{idem}$ (все критерии одинаковы для подобных объектов)

$$\frac{m_i m_R}{m_U} = 1, \quad \frac{m_t}{m_R m_c} = 1, \quad \frac{m_L}{m_R^2 m_c} = 1, \quad m_w m_R m_c = 1.$$

Эти уравнения являются масштабными уравнениями, при этом также существуют независимые масштабы (соответствующие независимым параметрам) m_U, m_R, m_c , они выбираются произвольно.

Для данного примера имеем систему 4-го порядка с 4 неизвестными, но по π -теореме одно из этих уравнений является зависимым от других. В результате имеем систему 3-го порядка с 4-мя неизвестными. В общем случае решений такой системы может быть множество и выбрать одно единственное решение можно с помощью определенных ограничений, которые представляют собой условие однозначности.

m_U, m_R, m_c - выбираются произвольно

$$1) m_i = \frac{m_U}{m_R}$$

$$2) m_t = m_R m_c$$

$$3) m_L = m_R^2 m_c$$

$$4) m_w = \frac{1}{m_R m_c} = \frac{1}{m_t}$$

Общий вид масштабных уравнений для любой системы по методу размерности

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_{k+1}}{m_1^{x_1} m_2^{y_1} \dots m_k^{z_1}} = 1 \\ \frac{m_{k+2}}{m_1^{x_2} m_2^{y_2} \dots m_k^{z_2}} = 1 \\ \dots \\ \frac{m_{k+m}}{m_1^{x_m} m_2^{y_m} \dots m_k^{z_m}} = 1 \end{array} \right.$$

Определение критериев подобия процессов, описываемых уравнениями, содержащими неоднородные функции

Если часть членов уравнения, описывающего рассматриваемый процесс, неоднородные функции, то масштабные коэффициенты нельзя вынести за знак функции и, следовательно, преобразования приведенные выше – невозможны. В этих случаях у подобных процессов должны быть равны аргументы неоднородных функций.

Уравнения

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} \left(1 - \exp \left(-\frac{R_1}{L_1} t_1 \right) \right)$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} \left(1 - \exp \left(-\frac{R_2}{L_2} t_2 \right) \right)$$

будут тождественны, если

$$\exp [(-R_1/L_1)t_1] = \exp [(-R_2/L_2)t_2],$$

т.е. если

$$\frac{R_1}{L_1} t_1 = \frac{m_R}{m_L} \frac{R_2}{L_2} m_t t_2 = \frac{m_R m_t}{m_L} \frac{R_2 t_2}{L_2} = I p_1 \frac{R_2 t_2}{L_2} = \frac{R_2 t_2}{L_2}.$$

Т.е. необходимо потребовать равенства показателей степеней экспоненциальных (неоднородных) функций и принять этот показатель степени в качестве критерия подобия, т.е.:

$$p_1' = R_1 t_1 / L_1 = R_2 t_2 / L_2.$$

После преобразования уравнений для $i_1(t)$ и $i_2(t)$ к безразмерному виду критериями подобия сопоставляемых процессов будут:

$$p_1' = \frac{R t}{L} \cdot p_2 = \frac{u}{i R},$$

или, если принять $p_1 = (p_1')^{-1}$, то как и ранее

$$p_1 = \frac{L}{R t} \cdot p_2 = \frac{u}{i R},$$

что и следовало ожидать, так как рассматриваются различные формы математического описания одного и того же физического процесса.

Аналогично для уравнений содержащих тригонометрические функции $\sin(w_1 t_1) = \sin(m_w w_2 m_t t_2) = \sin(m_w m_t w_2 t_2) = \sin(I_{p_3} w_2 t_2) = \sin(w_2 t_2),$

если $I_{p_3} = m_w \cdot m_t = 1$, т.е. необходимо ввести дополнительный критерий подобия

$$p_3 = w t.$$

Преобразование критериев подобия

Возможность преобразования критериев подобия – их важное практическое свойство.

Определение: критерии подобия процесса, представленные в какой-либо форме записи, могут быть преобразованы в критерии подобия иной формы записи посредством перемножения или деления их, возведения в степень или умножения на любой постоянный коэффициент k .

Если, например, совокупность критериев подобия $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_{k+j}, \dots, p_m$, полностью описывает некоторый физический процесс, то и совокупность критериев подобия $p_1' = kp_1, p_2' = p_2^{-1}, \dots, p_k' = p_k p_{k+j}, p_{k+j}' = p_{k+j}/p_m, \dots, p_m' = (p_m)^k$ также будет полностью характеризовать этот процесс, т.к. при

$$p_1' = idem, \dots, p_2' = idem, \dots, p_k' = idem, \dots, p_{k+j}' = idem, \dots, p_m' = idem.$$

$$p_1' = kp_1 = idem, p_2' = 1/p_2 = p_2^{-1} = idem, \dots, p_k' = p_k p_{k+j} = idem, \dots, p_{k+j}' = p_{k+j}/p_m = idem, \dots, p_m' = (p_m)^k = idem.$$

Вторая теорема подобия и ее применение при определении критериев подобия (p-теорема)

Всякое полное физическое уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц измерения, может быть представлено функциональной зависимостью между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров.

Доказательство второй теоремы основано на свойствах степенных рядов (см. критериальные уравнения).

Количество всех параметров: n ,
Количество независимых параметров: k ,
Количество критериев: $m = n - k$.

Основное уравнение: $F(P_1, \dots, P_n) = 0$

Критериальное уравнение: $j(p_1, \dots, p_m) = 0$.

Если математическое описание известно, то критериальное уравнение получается на основе подстановки критериев в основное уравнение.

Согласно второй теореме, количество независимых критериев равно $m - 1$ или $n - k - 1$.

Когда математическое описание $F(P_1, \dots, P_n) = 0$ не известно, критериальное уравнение записывается в форме:

$$p_i - y(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m) = 0$$

$\Downarrow$

$$p_i = y(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m)$$

Эта теорема утверждает, что полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено зависимостью между критериями подобия, т.е. зависимостью, связывающей безразмерные величины, определенным образом полученные из участвующих в процессе параметров.

Вторая теорема (как и первая) основывается на предпосылке, что факт подобия между процессами известен. Она устанавливает число критериев подобия и существование однозначной зависимости между ними. Выражение для критериев подобия могут быть получены, если известен состав параметров процесса, но неизвестно его математическое описание.

Однако, вторая теорема (как и первая) не указывает способов выявления подобия между сопоставляемыми процессами и способов реализации подобия при построении моделей.

π -теорема позволяет заменять переменные, сократив их число с n размерных величин до $n - k$ безразмерных величин, и тем самым записывать уравнения процессов в критериальной форме. При этом облегчается обработка аналитических и экспериментальных исследований, так как связи между безразмерными π -критериями подобия выявляются, как правило, проще, чем связи между именованными величинами.

Третья теорема подобия и ее применение при установлении условий подобия.

Эта теорема о необходимых и достаточных условиях для создания подобия (иначе называемая обратной теоремой подобия) и в наиболее распространенной формулировке имеет следующий вид: необходимыми и достаточными условиями для создания подобия систем являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия сопоставляемых явлений.

Справка: Дифференциальное уравнение в общем виде описывает бесконечное множество процессов, относящихся к данному классу. Условия, определяющие индивидуальные условия процесса или явления, называются условиями однозначности. К ним относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления, факторы и условия:

- геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- физические параметры среды и тел, образующих систему;
- начальное состояние системы (начальные условия);
- условия на границах системы (граничные или краевые условия);
- взаимодействие объекта и внешней среды.

Нельзя математически сформулировать условия однозначности в общем виде, для каждого конкретного случая они различны, зависят от рода решаемой задачи и от вида уравнения.

Например, для уравнения $u = iR + L di/dt$, описывающем изменение тока в цепи с активным сопротивлением R и индуктивностью L при включении ее на $u = const$, достаточно задать параметры u , R , L и начальные условия $i(0) = i_0$ и $t(0) = t_0$.

В большинстве задач, связанных с исследованием полей, однозначность определяется не только начальными условиями, но и свойствами среды, геометрическими свойствами системы и граничными условиями.

Формулировка третьей теоремы, отвечающая реальным задачам

Положение № 1. Создание модели возможно, если критерии подобия, составленные из величин, характеризующих только ее системные параметры, равны соответствующим критериям изучаемой системы - оригинала.

– Примечание. Частным случаем является равенство материальных параметров систем элементов модели и оригинала, выраженных в относительных единицах.

Положение № 2. В созданной, согласно положению № 1, модели осуществление процессов, подобных оригиналу, возможно, если критерии подобия, содержащие только параметры процессов, входящих в условия однозначности и в том числе начальные условия (параметры исходного режима, возмущений и отклонений), в модели и оригинале соответственно одинаковы.

– Примечание. Частным случаем является равенство параметров исходного режима в модели и оригинале, выраженных в относительных единицах.

Положение №3. Осуществление модели согласно формулировкам № 1 и № 2 возможно в сколь угодно сложных анизотропных, нелинейных или имеющих вероятно заданные параметры системах при условии одновременного соблюдения соответствующих дополнительных положений.

Изотропные параметры имеют одинаковые физические свойства (электропроводность, теплопроводность, упругость и т.п.) по всем направлениям внутри системы.

Анизотропные параметры – имеют различные свойства по разным направлениям.

– Примечание. Третья теорема в первой формулировке имеет ряд ограничивающих условий. (В частности не распространяется на автотомельные системы, для которых нельзя составить ни одного критерия, содержащего только параметры системы, но можно при любых их значениях осуществлять переход от характеристик одного процесса к характеристикам другого за счет изменения только масштабов параметров процесса).

– Примечание. В указанных выше положениях понимается, что система представляет собой совокупность взаимодействующих элементов, связанных в той или иной мере единством происходящих процессов.

Этих положений достаточно, чтобы пользоваться третьей теоремой, не заботясь о ее доказательствах.

Автомодельность

Автомодельность какого-либо явления означает автоматическое сохранение его подобия исходному явлению (оригиналу) независимо от абсолютных значений параметров элементов той системы, в которой данное явление протекает.

Формальный признак автомодельности выполнение условия $m_{э.с.} \leq k$, где

$m_{э.с.}$ - число параметров элементов системы.

Процессы, описываемые двучленными уравнениями, всегда автомодельны. Критерии подобия автомодельных процессов при моделировании служат не для расчета значений параметров элементов модели, а лишь для определения масштабов при любых значениях параметров элементов модели.

Признак автомодельности: процессы, протекающие в системах, из параметров которых нельзя составить ни одного безразмерного комплекса, являются автомодельными. При этом в представленные в критериальной форме дифференциальные уравнения и начальные условия войдут только выраженные в относительных единицах параметры, и процессы будут подобными при любых значениях параметров системы.

Пример автомодельности: Уравнение второго закона Ньютона $f = M d^2 l / dt^2$.

Уравнение содержит два члена ($N = 2$), четыре параметра (f, M, l, t), т.е. $n = 4$. Согласно первой теореме подобия, число критериев подобия $N - 1 = 1$. Это единственный критерий

$$p = Ml / (ft^2).$$

Так как критерий подобия один, то число $n - k$ должно быть равно 1, следовательно, число независимых параметров $k = 3$. Действительно: формулы размерностей всех параметров:

$$[f] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}; \quad [M] = [M]^1 [L]^0 [T]^0;$$

$$[l] = [M]^0 [L]^1 [T]^0; \quad [t] = [M]^0 [L]^0 [T]^1.$$

Матрица размерностей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Общее число определителей третьего порядка:

$$C_4^3 = 4! / [3!(4 - 3)!] = 4$$

ни один из них не равен нулю потому, что не ни один из них не содержит строку, являющуюся линейной комбинацией двух остальных. Следовательно, любые три из четырех параметров могут быть выбраны в качестве независимых (в том числе f и M), т.е. процессы, описываемые уравнением второго закона Ньютона, подобны при любых значениях f и M и, следовательно, автомодельны.

Пример к автомодельности: Включение R_1, L_1 цепи на постоянное напряжение u_1 .

Уравнение описываемого процесса

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 di_1 / dt_1.$$

Критерии подобия процесса имеют вид (один из возможных)

$$p'_1 = \frac{i_1}{u_1 R_1^{-1}}$$

$$p'_2 = \frac{t_1}{L_1 R_1^{-1}}$$

$$\text{причем } p'_1 = f(p'_2).$$

Для обеспечения подобия второго процесса первому (исходному) необходимо, чтобы определяющие критерии в сходственные моменты времени были равны, т.е. чтобы

$$p'_2 = \frac{t_2}{L_2 R_2^{-1}}.$$

При любых заданных значениях L_2 и R_2 всегда можно удовлетворить этим условиям, соответствующим выбором величины t_2 и, следовательно,

$$m_t = t_1 / t_2.$$

Если $R_1 / L_1^{-1} R_2 / L_2$ или $m_R / m_L^{-1} 1$, то и $m_t = m_R / m_L^{-1} 1$.

Таким образом, при соответствующем выборе масштаба времени рассматриваемые два процесса будут подобны при любых значениях параметров элементов второй системы (R_2, L_2). Значение еще одного параметра второй системы u_2 никакого влияния на подобие процессов не оказывает, поскольку он входит в неопределяющий критерий. Следовательно, величина u_2 может быть любой, что также соответствует и тому, что u_2 входит в систему независимых параметров второго процесса.

Итак, при любых значениях параметров элементов системы (u, R, L) процессы в цепях RL оказываются подобными. Следовательно, эти процессы можно считать автомодельными. При этом необходимо учитывать ограничения, наложенные на выбор масштаба времени m_t .

Процессы, протекающие в цепях RLC , не могут быть полностью автомодельными, поскольку число независимых параметров меньше числа параметров системы.

Заключительный пример к теоремам подобия

Дифференциальное уравнение переходного процесса в цепи из активного сопротивления R , индуктивности L и емкости C при включении на источник постоянного напряжения u

$$u = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri.$$

Для конкретного процесса следует задать значения параметров u, R, L, C и начальные условия $i = 0$ при $t = 0$. При этом по π -теореме из шести параметров ($m = 6$) три являются независимыми ($k = 3$), и, следовательно, число критериев подобия составляет $m - k = 3$, причем существует 15 форм записи трех критериев. Если независимые переменные u, C и t , получаются следующие критерии:

$$p_1 = \frac{it}{uC}$$

$$p_2 = \frac{RC}{t}$$

$$p_3 = \frac{LC}{t^2}$$

Пусть существуют два процесса, у которых критерии p_2 и p_3 равны. Покажем, что равенства этих критериев достаточно для подобия процессов. Если p_2 и p_3 соответственно одинаковы у двух процессов, то

$$R_1 C_1 / t_1 = R_2 C_2 / t_2$$

$$L_1 C_1 / t_1^2 = L_2 C_2 / t_2^2,$$

или

$$\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} = \frac{m_R m_C}{m_t} = 1$$

$$\frac{L_1 C_1}{L_2 C_2} = \frac{m_L m_C}{m_t^2} = 1$$

$$\left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2$$

Поскольку u , C и t – независимые параметры, то и масштабы можно выбрать произвольно. Отсюда масштабы сопротивлений и индуктивностей:

$$m_R = m_t/m_C$$

$$m_L = m_t^2/m_C.$$

Если произвольно выбраны m_u , m_C и m_t и определены m_R и m_L , то при $p_2 = p_3$ масштаб токов m_i , будет таким, что всегда справедливо условие

$$m_i m_t / (m_u m_C) = 1.$$

Параметры первого процесса: $u_1 = 500$ В, $R_1 = 30$ Ом, $L_1 = 2.62$ Гн, $C_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ Ф. Зададимся $m_u = 5$; $m_C = 0.4$; $m_t = 1$. Тогда

$$m_R = m_L = 1/0.4 = 2.5,$$

и параметры второго процесса $u_2 = u_1/m_u = 500/5 = 100$ В; $R_2 = R_1/m_R = 30/2.5 = 12$ Ом; $L_2 = L_1/m_L = 2.62/2.5 = 1.045$ Гн; $C_2 = C_1/m_C = 2 \cdot 10^{-3}/0.4 = 5 \cdot 10^{-3}$ Ф.

При данных параметрах для сходственных моментов времени критерии p_2 и p_3 соответственно одинаковы для обоих процессов. Например, при $t_1 t_2 = 0.125$ с

$$p_2 = 30 \cdot 2 \cdot 10^{-3} / 0.125 = 12 \cdot 5 \cdot 10^{-3} / 0.125 = 0.480;$$

$$p_3 = 2.62 \cdot 2 \cdot 10^{-3} / 0.125^2 = 1.045 \cdot 5 \cdot 10^{-3} / 0.125^2 = 0.336.$$

Для обоих процессов $R^2 C - 4L < 0$ и, следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$i = \frac{u \exp \left[-Rt / (2L) \sin t \sqrt{(4L - R^2 C) / (4L^2 C)} \right]}{L \sqrt{(4L - R^2 C) / (4L^2 C)}}.$$

Ниже приведены результаты расчета значений токов i_1 и i_2 . Соответствующие зависимости $i = f(t)$ представлены на рисунке. Видно, что для сходственных моментов времени отношения токов постоянно: $m_i = 2$.

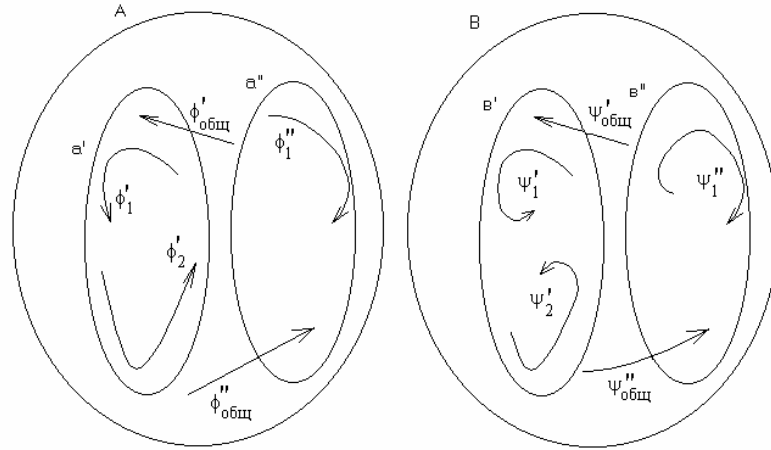
t , с	0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
i_1 , А	0	7.450	0	-1.820	0	0.430	0	-0.093
i_2 , А	0	3.725	0	-0.910	0	0.215	0	-0.047

Таким образом, равенство критериев подобия p_2 и p_3 оказывается достаточным для того, чтобы выполнялись условия, накладываемые на масштабы. Поскольку пропорциональность всех параметров существует и эти условия соблюдены, то рассматриваемые процессы подобны.

Дополнительные положения о подобии

Подобие сложных систем

Подобие сложных систем, состоящих из подсистем, соответственно подобных в отдельности, обеспечивается подобием всех сходственных элементов и связей, являющихся общими для этих подсистем.



Сложные системы А и В состоят из подсистем a' , a'' и b' , b'' соответственно. Процессы в обеих системах описываются уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} \Phi_A &= j_1' + j_2' + j_{общ}' + j_{общ}'' + j_1'' = 0 \\ \Psi_B &= y_1' + y_2' + y_{общ}' + y_{общ}'' + y_1'' = 0 \end{aligned} \right\},$$

где j_1' , j_2' и y_1' , y_2' - члены уравнений, характеризующие «внутренние» процессы в подсистемах a' и b' ; j_1'' и y_1'' - «внутренние» процессы в подсистемах a'' и b'' ; $j_{общ}'$, $j_{общ}''$ и $y_{общ}'$, $y_{общ}''$ - процессы взаимодействия (взаимосвязи) подсистем a' , a'' и b' , b'' соответственно.

Если рассматривать системы А и В как единые системы для процессов F_A и Y_B по правилу интегральных аналогов можно записать критерии подобия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{j_2'}{j_1'} &= \frac{y_2'}{y_1'} = p_1 \\ \frac{j_{общ}'}{j_1'} &= \frac{y_{общ}'}{y_1'} = p_2 \\ \frac{j_{общ}''}{j_1'} &= \frac{y_{общ}''}{y_1'} = p_3 \\ \frac{j_1''}{j_1'} &= \frac{y_1''}{y_1'} = p_4 \end{aligned} \right\}$$

Для «внутренних» процессов в подсистемах a' и a'' , b' и b'' , рассматриваемых в отдельности, критерии подобия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{j_2'}{j_1'} &= \frac{y_2'}{y_1'} = p_1 \\ \frac{j_{общ}'}{j_1'} &= \frac{y_{общ}'}{y_1'} = p_2 \\ \frac{j_{общ}''}{j_1'} &= \frac{y_{общ}''}{y_1'} = p_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{подсистемы } a', b' \\ \text{подсистемы } a'', b'' \end{array}$$

Подобие каждой из подсистем, образующих системы А и В, обеспечиваются в соответствии с третьей теоремой подобием граничных условий, которые в данном случае характеризуются процессами $j'_{общ}$, $j''_{общ}$ и $y'_{общ}$, $y''_{общ}$, т.е. связями между подсистемами, которые одновременно являются общими сходственными элементами для соответствующих подсистем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{j'_{общ}}{j'_1} &= \frac{y'_{общ}}{y'_1} = p_5 \\ \frac{j''_{общ}}{j'_{общ}} &= \frac{y''_{общ}}{y'_{общ}} = p_6 \\ \frac{j''_{общ}}{j''_1} &= \frac{y''_{общ}}{y''_1} = p_7 \end{aligned} \right\}$$

В соответствии с правилами преобразования критериев подобия можно записать:

$$\frac{p_5 \cdot p_6}{p_7} = \frac{j'_{общ} j''_1 j''_{общ}}{j'_1 j''_{общ} j'_{общ}} = \frac{j''_1}{j'_1} = p_4.$$

Подобия процессов в подсистемах сложных систем и подобия процессов взаимодействия между этими подсистемами определяют подобие сложных систем.

Таким образом, для подобия сложных систем, образованных несколькими подсистемами, подобными в отдельности, необходимо равенство критериев подобия, составленных из параметров, общих для подобных подсистем.

Следствия первого дополнительного положения

Следствие №1. Если каждые две системы, в отдельности подобные двум другим системам, сходственно соединены между собой через третьи системы, то и образовавшиеся при этом две новые (сложные) системы будут подобны при подобии соединяющих их систем.

Следствие №2. Две подобные системы остаются подобными после любых преобразований, выполненных соответственно одинаково в обеих системах.

Подобие систем с нелинейными или переменными параметрами

Условия подобия линейных сложных систем могут быть распространены на системы с нелинейными или переменными параметрами, если удовлетворяется дополнительное требование совпадения относительных характеристик сходственных нелинейных или переменных параметров.

Если один из параметров нелинейный или переменный:

$$F(P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i_{нл}}, P_{i+1}, \dots, P_n) = 0$$

$$F(P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i_{прм}}, P_{i+1}, \dots, P_n) = 0$$

$P_{i_{нл}} = f(P_i)$ – если функция нелинейна и задана таблично, то ее можно аппроксимировать полиномом, т.е.

$$P_{i_{нл}} = f(P_i) \approx a_0 + a_1 \cdot p_i + a_2 \cdot p_i^2 + \dots + a_q \cdot p_i^q.$$

Тогда общие уравнения получаются:

$$F(P_1, \dots, \cancel{P_{i_{нл}}}, a_0, a_1, \dots, a_q, p_i, \dots, P_n) = 0$$

это означает, что количество критериев увеличивается на $q+1$ параметров (один критерий заменяется на $q+2$ критериев).

$$P_1 = \frac{P_{\kappa+1}}{P_1^{x_1} P_2^{y_1} \dots P_{\kappa}^{z_1}}$$

М

$$P_m = \frac{P_{\kappa+m}}{P_1^{x_m} P_2^{y_m} \dots P_{\kappa}^{z_m}}$$

Л Л Л Л Л Л Л Л Л

$$P_{a_0} = \frac{a_0}{P_1^{x_{m+1}} P_2^{y_{m+1}} \dots P_{\kappa}^{z_{m+1}}}$$

М

$$P_{a_q} = \frac{a_l}{P_1^{x_{m+q+1}} P_2^{y_{m+q+1}} \dots P_{\kappa}^{z_{m+q+1}}}$$

Аналогичным образом поступают при наличии переменных параметров:

$$P_{i_{\text{прм}}} = f(t)$$

Подобие анизотропных или неоднородных систем

Условия подобия изотропных или однородных систем могут быть распространены на анизотропные или неоднородные системы, если удовлетворяется дополнительное требование обеспечения одинаковой относительной анизотропии или неоднородности сходственных параметров сопоставляемых систем.

Изотропные системы имеют одинаковые физические свойства (электропроводность, теплопроводность, упругость и т.п.) по всем направлениям внутри системы; анизотропные – различные свойства, в однородных системах все элементы обладают постоянными по значениям сходственными физическими параметрами, неоднородные имеют переменные значения сходственных параметров.

То есть изотропия и анизотропия характеризует систему со стороны изменения параметров по различным направлениям, однородность и неоднородность характеризует изменение параметров по абсолютному значению.

Подобие физических процессов при отсутствии геометрического подобия

Условия подобия процессов в геометрически подобных системах могут быть распространены на геометрически неподобные системы, если выполняется дополнительное требование обеспечения такого нелинейного подобия пространства параметров системы, при котором существуют подобные изменения параметров процесса в нелинейно-сходственных точках этого пространства.

Подобие при вероятностном характере процесса

Условия подобия процессов в системах с детерминировано определенными параметрами могут быть распространены на системы с вероятностно определенными параметрами, если удовлетворяются дополнительные требования совпадения плотностей вероятностей сходственных параметров в относительной форме и пропорциональности их статических моментов, степени масштабных коэффициентов, при которых совпадают с порядками соответствующих моментов.

Подобное моделирование

Подобная модель – модель, свойства, параметры и значения переменных которой, пропорциональны соответствующим свойствам, параметрам и значениям переменных оригинала.

Для подобного моделирования некоторого объекта-оригинала требуются исходные данные. В общем случае к ним относятся следующее:

1. Математическое описание оригинала в виде уравнения

$$F(y_o, x_{oi}, t_o, P_{Oj}) = 0,$$

при этом y_o – выходная переменная объекта; x_{oi} – входные переменные объекта; t_o – временная переменная объекта; P_{Oj} – параметры объекта (материальные).

2. Пределы переменных величин y_o, x_{oi}, t_o , если это возможно.
3. Условия однозначности решения соответствующих уравнений.
4. Задание функциональных зависимостей $x_{oi} = f_i(t_o)$.

Этапы процесса подобного моделирования

1. Выбирается из числа существующих или создается специальный объект – модель с математическим описанием

$$F(y_m, x_{mi}, t_m, P_{Mj}) = 0,$$

сходственным с описанием оригинала.

2. Определяются критерии подобия для оригинала и модели p_o и p_m .

3. Составляются в общем виде масштабные уравнения на основе выражений для критериев подобия

$$p_o / p_m = 1$$

4. Вводятся масштабы сходственных переменных y_o и y_m , x_{oi} и x_{mi} , t_o и t_m и масштабным уравнениям придается окончательный вид.

Масштабы можно принять равными

$$m_y = y_o / y_m; m_{xi} = x_{oi} / x_{mi}; m_t = t_o / t_m$$

5. Анализируется система масштабных уравнений. Зависимые уравнения из системы исключаются. Установление противоречивости системы масштабных уравнений означает невозможность подобия.

6. Выбираются конкретные численные значения масштабов с учетом реальных предельных значений сходственных переменных.

7. Устанавливаются условия однозначности модели, подобные условиям однозначности оригинала.

8. Рассчитываются функциональные зависимости $x_{mi} = x_{mi}(t_m)$, $x_{oi} = x_{oi}(t_o)$.

Пример: требуется подвергнуть моделированию некоторый материальный объект, описываемый уравнением

$$j_2 = \int_0^t j_1 dt, \quad (2.71)$$

где j_1 и j_2 - угловые величины, измеряемые в радианах; t - время в секундах.

1. В качестве модели выбирается математический аналог (генератор линейно изменяющегося напряжения), описываемый сходственным уравнением

$$u_2 = -2 \int_0^t u_1 dt, \quad (2.72)$$

где u_1, u_2 - напряжения постоянного тока, измеряемые в вольтах; t - время в секундах.

Полагаем в (2.71) $t = t_O$, а в (2.72) $t = t_M$ и вводим операторы дифференцирования $D_O = d/dt_O$, $D_M = d/dt_M$. Тогда уравнения (2.71) и (2.72) примут вид дифференциальных уравнений первого порядка

$$D_O j_2 = j_1, \quad D_M u_2 = -2u_1$$

с нулевыми начальными условиями. Множитель при j_1 в первом уравнении, равный единице, имеет размерность 1/с (!).

2. Приведем дифференциальные уравнения к безразмерной форме

$$1 = \frac{j_1}{D_O j_2}, \quad 1 = -\frac{2u_1}{D_M u_2}$$

определяем критерии подобия

$$p_O = \frac{j_1}{D_O j_2}, \quad p_M = -\frac{2u_1}{D_M u_2}.$$

3. Составляется в общем виде масштабное уравнение

$$\frac{p_O}{p_M} = -\frac{j_1 D_M}{2u_1 D_O} = 1.$$

Отсюда следует, что в одной из двух пар сходственных переменных ϕ_1 и u_1 или ϕ_2 и u_2 переменные должны иметь разные знаки.

4. Вводим масштабы

$$m_2 = \frac{j_2}{u_2} B^{-1}, \quad m_1 = \frac{j_1}{-u_1} B^{-1}, \quad m_t = \frac{t_O}{t_M}$$

и получаем масштабное уравнение в окончательном виде

$$\frac{m_1 m_t}{2 m_2} = 1$$

5. Полученное единственное масштабное уравнение, конечно, непротиворечиво.

6. Согласно полученному масштабному уравнению можно принять $m_1 = 2B^{-1}$, $m_2 = 10B^{-1}$. Тогда $m_t = 10$. При таком масштабе времени процессы, происходящие в модели, аналогичны по форме процессам в оригинале, но протекают в 10 раз быстрее.

7. Нулевые начальные условия являются подобными условиями однозначности при любых масштабах.

8. Для расчета функции $u_1 = u_2(t_M)$, подобной заданной функции $j_1 = j_2(t_O)$, имеем

$$u_1 = -\frac{j_1}{m_1} = -\frac{j_1(t_O)}{m_1} = -\frac{j_1(m_t t_M)}{m_1}$$

или окончательно

$$u_1 = -\frac{1}{2} j_1(10 t_M)$$

В данном случае материальная подобная модель, согласно вышеприведенной терминологии, является формальной.